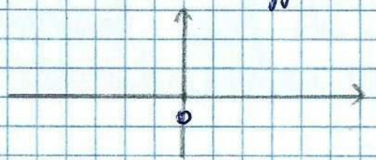
Risoluzione di problemi descritti dall'equazione della diffusione

Passiamo a un secondo gruppo di problemi, questa volta inerenti l'equazione della diffusione

Esempio 1: caso monodimensionale

Studiamo la diffusione su una retta infinita:



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) = 0 \\ T(x,0) = f(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} T(x,t) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo una condizione asintotica in cui lo zero non è quello della scala Kelvin (irraggiungibile), ma una generica temperatura di riferimento. Tentiamo come al solito la separazione delle variabili:

$$T(x,t) = A(x)\cdot B(t) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = A''(x)\cdot B(t) \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = A(x)\cdot \dot{B}(t)$$

$$\Rightarrow A''(x)\cdot B(t) = \frac{1}{k}\, A(x)\cdot \dot{B}(t) \Rightarrow \frac{A''(x)}{A(x)} = \frac{1}{k}\cdot\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = c$$

Effettivamente abbiamo separato le variabili e possiamo ora scrivere due equazioni:

$$\begin{cases} A''(x) - cA(x) = 0 \\ \dot{B}(t) - ck\,B(t) = 0 \end{cases}$$

Partiamo dalla seconda:

$$\frac{dB}{dt} = c\cdot k\cdot B \Rightarrow \int\frac{dB}{B} = ck\int dt \Rightarrow \ln B = ckt + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow B(t) = e^{ckt}\cdot e^{\tilde{c}} = \hat{c}\cdot e^{ckt},\ t>0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} B(t) = \begin{cases} +\infty & c>0 \\ 0 & c<0 \end{cases}$$

Vogliamo che $B(t)$ vada a zero per $t\to+\infty$ (necessità per la fisica del problema), quindi poniamo $c<0$, $c = -4\pi^2 q^2$, costante di integrazione nel dominio del tempo. Risulta $B(t) = \hat{c}\, e^{-4\pi^2 q^2 kt}$, con $\hat{c} = \hat{c}(q)$ indipendente dal tempo. Passiamo all'equazione spaziale:

$$A''(x) - cA(x) = 0 \Rightarrow A''(x) + 4\pi^2 q^2 A(x) = 0$$

$$\Rightarrow A(x) = \tilde{a}(q)\cdot\cos(2\pi qx) + \tilde{b}(q)\cdot \operatorname{sen}(2\pi qx) = a(q)\,e^{2\pi iqx} + b(q)\,e^{-2\pi iqx}$$

La soluzione è (si usa l'integrale poiché il dominio di studio è infinito, quindi lo spettro è continuo) sostituendo $\hat{c} = c$, $c(q)\cdot a(q) \to a(q)$ e $b(q)\cdot c(q) \to b(q)$:

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(q)\cdot e^{-4\pi^2 q^2 kt}\left[a(q)\cdot e^{2\pi iqx} + b(q)\cdot e^{-2\pi iqx}\right] dq =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a(q)\, e^{-4\pi^2 q^2 kt}\cdot e^{2\pi iqx}\, dq + \int_{-\infty}^{+\infty} b(q)\cdot e^{-4\pi^2 q^2 kt}\cdot e^{-2\pi iqx}\, dq$$

Poniamo, nel primo integrale, $q = -s$ ($q^2 = s^2$, $dq = -ds$, limiti invertiti):

$$T(x,t) = \int_{+\infty}^{-\infty} (-1)\,a(-s)\cdot e^{-4\pi^2 s^2 kt}\cdot e^{-2\pi isx}\, ds + \int_{-\infty}^{+\infty} b(q)\cdot e^{-4\pi^2 q^2 kt}\cdot e^{-2\pi iqx}\, dq =$$

Torniamo ora a q ponendo $-s = -q$ e successivamente sommiamo $a(-q)+b(q)=c(q)$ (una nuova c diversa dalle precedenti):

$$T(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} b(q)\cdot e^{-4\pi^2ktq^2}\cdot e^{-2\pi iqx}\,dq+\int_{-\infty}^{+\infty} a(-q)\cdot e^{-4\pi^2q^2kt}\cdot e^{2\pi iqx}\,dq=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} c(q)\cdot e^{-4\pi^2ktq^2}\cdot e^{-2\pi iqx}\,dq$$

Se $t=0$ si ottiene $T(x,0)=\int_{-\infty}^{+\infty} c(q)\cdot e^{-2\pi iqx}\,dq=f(x)$, con $f(x)$ nota, $c(q)$ da studiare. Posto $f(x)=\hat{c}(x)$ si ha la trasformata di Fourier di $c(q)$. Quindi $c(x)$ è l'antitrasformata di $f(x)$. Possiamo usare la trasformata anche per $T(x,t)$ ricordando il prodotto di convoluzione:

$$T(x,t)=F\left(c(q)\cdot e^{-4\pi^2q^2kt}\right)=F\left(F^{-1}(f(x))\cdot e^{-4\pi^2q^2kt}\right)=F(F^{-1}(f(x)))*F\left(e^{-4\pi^2q^2kt}\right)$$

Essendo $e^{-4\pi^2q^2kt}$ una Gaussiana possiamo scrivere:

$$F\left(e^{-4\pi^2q^2kt}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{4\pi^2kt}}\cdot e^{-\frac{\pi^2y^2}{4\pi^2kt}}=\frac{e^{-y^2/4kt}}{\sqrt{4\pi^2kt}}$$

$$\Rightarrow T(x,t)=f(x)*\frac{e^{-y^2/4kt}}{\sqrt{4\pi^2kt}}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\cdot e^{-\frac{(x-z)^2}{4kt}}\,dz$$

Ricordando il prodotto di convoluzione $(f*g)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cdot g(x-z)\,dz$

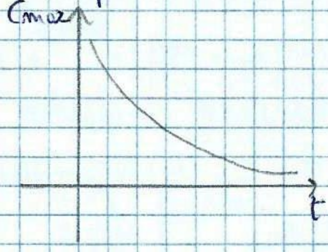
Avendo ottenuto la soluzione generica possiamo applicarla al caso particolare in cui vi sia un'alta concentrazione di inquinante o un'altissima temperatura (una Dirac) nell'origine.

$$\begin{cases}\frac{\partial^2C}{\partial x^2}-\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t}=0\\ C(x,0)=A\,\delta(x)\\ \lim_{x\to\infty}C(x,t)=0\end{cases}$$

Portiamo avanti la soluzione con la concentrazione C, identica a quella della diffusione termica:

$$C(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty}A\cdot\delta(z)\cdot e^{-\frac{(x-z)^2}{4Dt}}\,dz=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}A\cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}},\quad f(x)=C(x,0)=A\delta(x)$$

Il materiale che si diffonde è rappresentato da A, al tempo zero e a qualsiasi tempo (conservazione della massa):



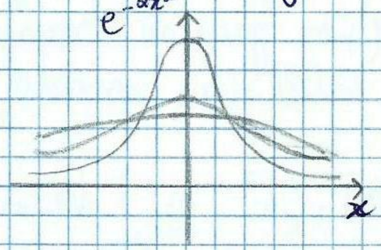
$$Q=\int_{-\infty}^{+\infty}C(x,0)\,dx=A\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx=A$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}C(x,t)\,dx=A$$
$$\Rightarrow C_{max}(t)=C(0,t)=\frac{A}{\sqrt{4\pi Dt}}$$

Nel tempo la concentrazione cala dal valore (infinito) che aveva all'inizio.

La σ ci dà la larghezza a partire dalla Dirac iniziale:

$$\sigma(t)=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\frac{1}{4Dt}}}=\sqrt{2Dt}\qquad \alpha=\frac{1}{4Dt}$$

Possiamo esprimere graficamente il processo di "abbassamento" delle Gaussiane:



$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(x,t)\,dx = \frac{A}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{Dt}}\,dx = \frac{A}{\sqrt{4\pi Dt}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4Dt}}} = \frac{A}{\cancel{\sqrt{4\pi Dt}}}\cancel{\sqrt{4\pi Dt}} = A$$

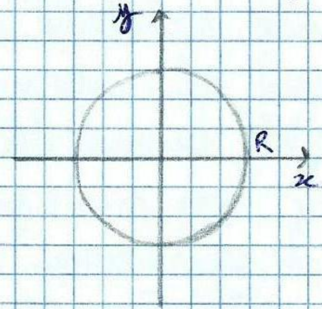
Nonostante il limite seguente a rigore non esista, la Dirac è assunta come limite delle Gaussiane:

$$\delta(x) = \lim_{s\to 0^+} \frac{e^{-\frac{x^2}{4s}}}{\sqrt{4\pi s}} \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-x^2/4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} = \delta(x)$$

Tornando indietro si torna alla Dirac

Esempio 2: cerchio con problema di Dirichlet

Applichiamo l'equazione del calore al cerchio interno:



$$\begin{cases} \Delta T - \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 & 0 \le r \le R \\ T(R,\theta,t) = 0 & \text{b.c.} \\ T(r,\theta,0) = f(r,\theta) & \text{i.c.} \\ f(R,\theta) = 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$T = T(r,\theta,t) \qquad \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

Usiamo la separazione delle variabili, $T(r,\theta,t) = A(r)\cdot B(\theta)\cdot Q(t)$:

$$A''(r)B(\theta)\cdot Q(t) + \frac{1}{r}A'(r)\cdot B(\theta)\cdot Q(t) + \frac{1}{r^2}A(r)\cdot B''(\theta)\cdot Q(t) - \frac{1}{k}A(r)\cdot B(\theta)\cdot \dot{Q}(t) = 0$$

Moltiplichiamo l'equazione per $\frac{r^2}{A(r)B(\theta)Q(t)}$:

$$\frac{A''(r)}{A(r)}r^2 + \frac{A'(r)}{A(r)}r + \frac{B''(\theta)}{B(\theta)} - \frac{r^2}{k}\frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)} = 0$$

$$\Rightarrow r^2\frac{A''(r)}{A(r)} + r\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{r^2}{k}\cdot\frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)} = -\frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = K$$

Il primo membro non dipende da θ, il secondo né da r né da t. Per l'uguaglianza entrambi non dipendono da r, θ e t, quindi sono uguali alla costante K. Necessitando di una soluzione periodica (di periodo 2π) scegliamo $K>0$ e scriviamo:

$$B''(\theta) + K\,B(\theta) = 0 \Rightarrow B(\theta) = a\cos(\sqrt{K}\,\theta) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{K}\,\theta).$$

Affinché sia $B(\theta+2\pi) = B(\theta)$ deve essere $\sqrt{K} = n \in \mathbb{N}$, cioè $K = n^2$. Otteniamo quindi la serie $B_n(\theta) = a_n\cos(n\theta) + b_n\,\mathrm{sen}(n\theta)$. Passiamo all'equazione con A e Q:

$$r^2\frac{A''(r)}{A(r)} + r\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{r^2}{k}\cdot\frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)} = -\frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = n^2 \Rightarrow \frac{A''(r)}{A(r)} + \frac{1}{r}\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{n^2}{r^2} = \frac{1}{k}\frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)} = \gamma$$

Consideriamo $\dot{Q}(t) = \gamma k\cdot Q(t)$:

$$\int\frac{dQ}{Q} = \gamma k\int dt \Rightarrow \ln Q = \gamma kt + \ln Q_0 \Rightarrow Q = Q_0 e^{\gamma kt} = Q_0(\gamma)\cdot e^{\gamma kt}$$

Q_0 è infatti indipendente da t, ma può dipendere da γ! Affinché la temperatura vada a zero (per grandi tempi, su tutto il cerchio) deve essere $\lim_{t\to\infty} Q(t) = 0$, ovvero $\gamma < 0$, $\gamma = -\lambda^2$:

$$Q(t) = Q_0(\lambda)\cdot e^{-\lambda^2 k t} \Rightarrow A''(r) + \frac{1}{r}A'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\cdot A(r) = 0$$

Abbiamo ottenuto un'equazione radiale a coefficienti non costanti, molto difficile da risolvere e tipica dei problemi in coordinate polari. Si tratta dell'equazione di Bessel, per cui vanno introdotte la prima e la seconda soluzione di Bessel, J_n e Y_n:

$$A(r) = c_1 J_n(\lambda r) + c_2 Y_n(\lambda r)$$

Gli zeri della J_n vengono indicati con $z_j^{(n)}$. J_0 è pari a 1 in zero, J_n con $n \geq 1$ è pari a zero in zero. Le Y_n invece divergono in zero, quindi possiamo immediatamente escluderle dalla nostra soluzione. Passando alle condizioni al contorno, deve essere $T(R,\theta,t) = A(R)\cdot B(\theta)\cdot Q(t) = 0$ $\forall\theta, \forall t$, quindi $A(R) = 0$. Ne segue $J_n(\lambda R) = 0$, ovvero $\lambda R = z_j^{(n)}$ per $n=0$ e $j = 1,2,3,\dots$ o $n = 1,2,3$ e $j = 0,1,2,\dots$ Il parametro di separazione λ assume un'infinità discreta di valori $\lambda_{jn} = \frac{z_j^{(n)}}{R}$. Giungiamo quindi alla seguente soluzione, che soddisfa le condizioni al contorno:

$$T(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} J_n\left(z_j^{(n)}\frac{r}{R}\right)\left[a_n\cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)\right]\cdot Q_{nj}\cdot e^{-\left(\frac{z_j^{(n)}}{R}\right)^2 k t} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} J_n\left(z_0^{(n)}\cdot\frac{r}{R}\right)\left[a_n\cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)\right] Q_{n0}\cdot e^{-\left(\frac{z_0^{(n)}}{R}\right)^2 k t}$$

Abbiamo aggiunto, nella seconda sommatoria, la soluzione esclusa dalla prima, per $j=0$. Ora notiamo che in realtà essa è nulla poiché $z_0^{(n)} = 0$ $\forall n \geq 1$, da cui $J_n\left(z_0^{(n)}\frac{r}{R}\right) = J_n(0) = 0$ $\forall n \geq 1$.
Rimane quindi:

$$T(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} J_n\left(z_j^{(n)}\frac{r}{R}\right)\left[a_{nj}\cos(n\theta) + b_{nj}\operatorname{sen}(n\theta)\right]\cdot e^{-\left(\frac{z_0^{(n)}}{R}\right)^2 k t}$$

Avendo rinominato $a_n Q_{nj} \to a_{nj}$ e $b_n Q_{nj} \to b_{nj}$. Per $r=R$ la J_n è calcolata nei suoi zeri e $T(R,\theta,t) = 0$ come imposto dalle condizioni al contorno. Per le condizioni iniziali ($t=0$) si ottiene:

$$T(r,\theta,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} J_n\left(z_j^{(n)}\frac{r}{R}\right)\left[a_{nj}\cos(n\theta) + b_{nj}\operatorname{sen}(n\theta)\right] = f(r,\theta)$$

Ed effettivamente $f(R,\theta) = 0$ come vuole la compatibilità.
Facciamo ora un'ipotesi semplificativa, quella di assial simmetria: $f(r,\theta) = f(r)$. La dipendenza da teta scompare ponendo $n=0$. In tal caso l'espressione di T ri-

risulta semplificata:

$$T(r,\theta,t)=\sum_{j=1}^{\infty} J_0\left(z_j^{(0)}\frac{r}{R}\right)a_{oj}\,e^{-\left(\frac{z_j^{(0)}}{R}\right)^2 kt}$$

Inoltre se $t=0$ si ottiene lo sviluppo di Fourier-Bessel, ovvero lo sviluppo di Fourier in coordinate polari per problema assialsimmetrico:

$$T(r,\theta,0)=f(r)=\sum_{j=1}^{\infty} J_0\left(z_j^{(0)}\frac{r}{R}\right)a_{oj}\,,\quad a_{oj}=\frac{2}{R^2\left[J_1(z_j^{(0)})\right]^2}\int_0^R r\,f(r)\,J_0\left(z_j^{(0)}\frac{r}{R}\right)dr$$

$$\Rightarrow T(r,\theta,0)=\sum_{j=1}^{\infty} J_0\left(z_j\frac{r}{R}\right)e^{-\left(\frac{z_j^{(0)}}{R}\right)^2 kt}\cdot\frac{2}{R^2\left[J_1(z_j^{(0)})\right]^2}\int_0^R s\cdot f(s)\,J_0\left(z_j^{(0)}\frac{s}{R}\right)ds$$

L'esponenziale è nella forma di una Gaussiana, va a zero per $t\to+\infty$. Perciò $\lim_{t\to+\infty}T(r,\theta,t)=0$. Possiamo quindi introdurre anche in questo caso una Dirac nell'origine (nel piano $\delta(\vec{r})=\delta(x)\cdot\delta(y)$, nello spazio $\delta(\vec{r})=\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\delta(z)$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot\delta(\vec{r})\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot\delta(x)\,dx\right]\delta(y)\,dy=$$

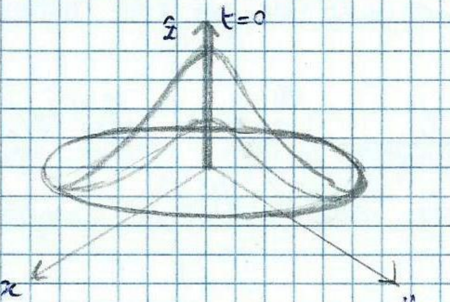
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(0,y)\,\delta(y)\,dy=f(0,0)=f(r=0)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\cdot\delta(\vec{r})\,r\,dr\,d\theta$$

È un integrale su tutto il piano invece da corone circolari. Procediamo:

$$f(0)=2\pi\int_0^{+\infty} f(r)\,r\,\delta(\vec{r})\,dr=\int_0^{+\infty} f(r)\left[2\pi r\,\delta(\vec{r})\right]dr=\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)\left[\frac{2\pi r}{2}\delta(\vec{r})\right]dr=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)\cdot\delta(r)\,dr$$

Avendo sfruttato la relazione tra Dirac radiale e cartesiana, ovvero $\delta(\vec{r})=\frac{\delta(r)}{\pi r}$ (nello spazio $\delta(\vec{r})=\frac{\delta(r)}{2\pi r^2}$). Tornando al problema abbiamo:



$$T(r,\theta,0)=Q\,\frac{\delta(r)}{\pi r}=f(r)$$

$$a_{oj}=\frac{2}{R^2\left[J_1(z_j^{(0)})\right]^2}\cdot\int_0^R r\left[\frac{Q\,\delta(r)}{\pi r}\right]J_0\left(z_j^{(0)}\frac{r}{R}\right)dr=$$

$$=\frac{2Q}{\pi R^2\left[J_1(z_j^{(0)})\right]^2}\int_0^R J_0\left(z_j^{(0)}\frac{r}{R}\right)\delta(r)\,dr$$

Affinché la δ di Dirac possa operare dobbiamo ricondurci a un integrale tra $-\infty$ e $+\infty$:

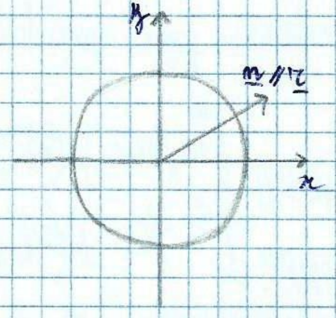
$$a_{oj}=\frac{Q}{\pi R^2\left[J_1(z_j^{(0)})\right]^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} J_0\left(z_j^{(0)}\frac{r}{R}\right)\delta(r)\,dr=\frac{Q}{\pi R^2 J_1\left[z_j^{(0)}\right]^2}\cdot J_0(0)$$

Con $J_0(0)=1$. Abbiamo sostituito subito $-\infty$ a 0 nell'estremo di integrazione perché la Dirac non ne è influenzata. Poi abbiamo inserito $+\infty$ dividendo per 2. La curva nel grafico non è la Gaussiana, ma il passo iniziale di J_0 (che si annulla sul bordo). Infatti la soluzione è:

$$T(r,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{Q}{\pi R^2\left[J_1(z_j^{(0)})\right]^2}\cdot J_0\left(z^{(0)}\frac{r}{R}\right)\cdot e^{-\left(z_j^{(0)}/R\right)^2 kt}$$

Esempio 3: cerchio con problema di Neumann

Riferendoci ancora al cerchio risolviamo un problema in cui è data una condizione sul flusso al contorno, pari a zero:



$$\begin{cases} \Delta C - \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = 0 & 0 \le r \le R \\ \frac{\partial}{\partial r} C(R,\theta,t) = 0 \\ C(r,\theta,t) = f(r) \\ f'(R) = 0 & \text{C.C} \end{cases}$$

La separazione delle variabili, $C(r,\theta,t) = A(r) B(\theta) \cdot Q(t)$, conduce alle soluzioni:

$$B_m(\theta) = a_m \cos(m\theta) + b_m \operatorname{sen}(m\theta) \qquad Q(t) = Q_0(\lambda) \cdot e^{-\lambda^2 D t} \qquad A(r) = c_1 J_m(\lambda r)$$

Per la geometria del problema $c_2 \cdot Y_m(\lambda r)$ è assente da $A(r)$, mentre per assialsimmetria deve essere $m=0$. Inoltre la condizione di compatibilità impone:

$$\frac{\partial}{\partial r} C(r,\theta,t)\Big|_{r=R} = 0 \Rightarrow A'(r) \cdot B(\theta) \cdot Q(t)\Big|_{r=R} = 0 \Rightarrow A'(R) = 0$$

$$\Rightarrow A'(r) = \frac{d}{dr} J_0(\lambda r) = -J_1(\lambda r) \cdot \lambda \Rightarrow A'(R) = -\lambda J_1(\lambda R) = 0 \Rightarrow \lambda R = z_j^{(1)}$$

Pertanto $\lambda_j = z_j^{(1)}/R$, da cui la soluzione complessiva risulta essere:

$$C(r,t) = \sum_{j=0}^{\infty} J_0\left(z_j^{(1)} \frac{r}{R}\right) a_j \, e^{-(z_j^{(1)}/R)^2 D t}$$

La condizione di Neumann è verificata poiché, derivando $C(r,t)$, si ottiene un'espressione contenente J_1 che si annulla per $r=R$.

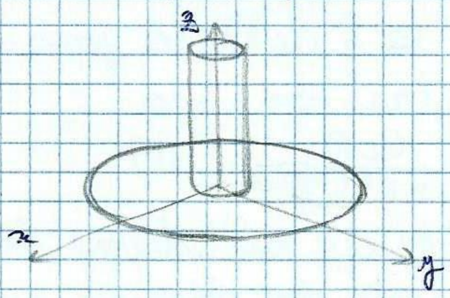
Se $t=0$ si ottiene la serie di Dini-Bessel:

$$C(r,0) = \sum_{j=0}^{\infty} J_0\left(z_j^{(1)} \frac{r}{R}\right) a_j$$

Che diviene $C(r,0) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} J_0\left(z_j^{(1)} \frac{r}{R}\right) a_j$ notando che per $j=0$ rimane solo a_0. I coefficienti sono:

$$a_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r)\, dr \qquad a_j = \frac{2}{R^2 [J_0(z_j^{(1)})]^2} \int_0^R r f(r) \, J_0\left(z_j^{(1)} r/R\right) dr$$

All'inizio l'inquinante (che si espande "sul" cerchio) è confinato in un cilindretto:



$$C(r,\theta,0) = f(r) = \begin{cases} C_0 & 0 \le r \le a \\ 0 & a \le r \le R \end{cases}$$

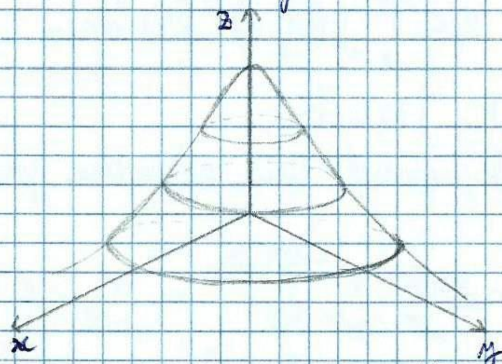
A t infinito la concentrazione avrà un valore costante:

$$\lim_{t \to \infty} C(r,t) = \frac{M}{A} = \frac{\int_0^R f(r)\, 2\pi r \, dr}{\pi R^2} = a_0$$

Pertanto a_0 è la condizione asintotica.

Esempio 4: diffusione assialsimmetrica su piano infinito

Possiamo immaginare uno scarico uniforme in un lago:



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 c(r,t)}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial c(r,t)}{\partial r} - \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial}{\partial t}c(r,t) = 0 \\ \lim\limits_{r\to\infty} c(r,t) = 0 \\ c(r,0) = f(r) \\ \lim\limits_{r\to\infty} f(r) = 0 \end{cases}$$

Procediamo con la separazione delle variabili, $c(r,t) = A(r)\cdot Q(t)$:

$$A''(r)\cdot Q(t) + \frac{1}{r}A'(r)\cdot Q(t) - \frac{1}{D}\cdot A(r)\cdot\dot{Q}(t) = 0 \Rightarrow \frac{A''(r)}{A(r)} + \frac{1}{r}\frac{A'(r)}{A(r)} = \frac{1}{D}\frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A''(r) + \dfrac{1}{r}A'(r) - k\,A(r) = 0 \\ \dot{Q}(t) = k\cdot D\cdot Q(t) \end{cases}$$

Per l'uguaglianza entrambi i membri non dipenderanno né da r né da t

La soluzione temporale deve tendere a zero per $t \to +\infty$, quindi l'esponenziale deve avere esponente negativo:

$$\frac{dQ}{dt} = kDQ \Rightarrow \int\frac{dQ}{Q} = \int kD\,dt \Rightarrow \ln Q = kDt + \ln Q_0$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0(k)\cdot e^{kDt} \Rightarrow k = -4\pi^2\gamma^2,\ Q(t) = Q_0(k)\cdot e^{-4\pi^2\gamma^2 Dt}$$

L'equazione spaziale conduce nuovamente all'equazione di Bessel: $A''(r) + \frac{1}{r}A'(r) + 4\pi^2\gamma^2 A(r) = 0$. Consideriamo le forme canoniche dell'equazione di Bessel e della modificata con le relative soluzioni:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(l^2 - \frac{n^2}{x^2}\right)y(x) = 0 \qquad y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \left(l^2 + \frac{n^2}{x^2}\right)y(x) = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 J_n(lx) + c_2 Y_n(lx) \qquad \Rightarrow y(x) = c_3 I_n(lx) + c_4 K_n(lx)$$

La soluzione della modificata non è accettabile poiché entrambe I_n e K_n divergono. Dobbiamo considerare la forma classica dell'equazione di Bessel con $n=0$, scartando Y_n (anch'essa divergente) e ponendo $l^2 = 4\pi^2\gamma^2 = -k$: $A(r) = J_0(2\pi\gamma r)$. La soluzione completa è quindi:

$$c(r,t) = J_0(2\pi\gamma r)\cdot Q_0(\gamma)\cdot e^{-4\pi^2\gamma^2 Dt} \Rightarrow c(r,t) = 2\pi\int_0^{+\infty}\frac{Q_0(\gamma)}{\pi\gamma}\,\gamma\,J_0(2\pi\gamma r)\,e^{-4\pi^2\gamma^2 Dt}\,d\gamma$$

Solitamente si integra tra 0 e $+\infty$ anziché tra $-\infty$ e $+\infty$ moltiplicando per 2. Inoltre abbiamo moltiplicato e diviso per $\gamma\pi$. Ora, posto $\alpha(\gamma) = \dfrac{Q_0(\gamma)}{\pi\gamma}$:

$$c(r,t) = 2\pi\int_0^{\infty} J_0(2\pi r\gamma)\,\gamma\,\alpha(\gamma)\,e^{-4\pi^2\gamma^2 Dt}\,d\gamma$$

Per $t=0$ si ottiene $c(r,0) = 2\pi\int_0^{\infty} J_0(2\pi r\gamma)\,\gamma\,\alpha(\gamma)\,d\gamma$, trasformata di Fouter - Bessel (ovvero Fourier in coordinate polari). Immaginiamo di avere uno scarico (in forma di δ di Dirac) nell'origine, $f(r) = K \frac{\delta(r)}{\pi r}$:

$$a(\gamma) = 2\pi \int_0^{+\infty} r\, J_0(2\pi\gamma r) \frac{K\delta(r)}{\pi r} dr = 2K \int_0^{+\infty} J_0(2\pi\gamma r) \cdot \delta(r)\, dr =$$

$$= K \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(2\pi\gamma r)\, \delta(r)\, dr = K \cdot J_0(0) = K$$

Tornando alla soluzione temporale, usando una soluzione presa dalle tavole degli integrali:

$$c(r,t) = 2\pi K \int_0^{+\infty} J_0(2\pi\gamma r)\, \gamma\, e^{-4\pi^2\gamma^2 Dt} d\gamma = \frac{2\pi K \cdot e^{-\frac{4\pi^2 r^2}{4 \cdot 4\pi^2 Dt}}}{2 \cdot 4\pi^2 Dt} = \frac{K}{4\pi Dt} \cdot e^{-\frac{r^2}{4Dt}}$$

Dalla Dirac si passa alla Gaussiana con semilarghezza:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1/4Dt}} = \sqrt{2Dt} = \sigma(t)$$

Per la conservazione della massa il materiale totale è sempre K:

$$\int_S c(r,t)\, dS = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} c(r,t)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} c(r,t)\, r\, dr = 2\pi \frac{K}{4\pi Dt} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} r\, dr =$$

$$= -K\, e^{-\frac{r^2}{4Dt}} \Big|_0^{\infty} = K$$